Τοπολογία 8/3/2018

Πρόταση: (ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΟΙΧΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ)

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος:

(i) Τα σύνολα $\emptyset$, X είναι ανοιχτά

(ii) Αν A, B ανοικτά τότε το $A \cap B$ είναι ανοικτό

(iii) Αν $(G_i)_{i \in I}$ οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του X, τότε το $\bigcup_{i \in I} G_i$ είναι ανοιχτό

απόδειξη

(i) Το $\emptyset$ προφανώς είναι ανοιχτό (αν δεν ήταν $\exists x \in \emptyset$ ώστε ...) άτοπο

Το X είναι ανοιχτό (αν $x \in X$ τότε για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq X$)

(ii) Έστω $x \in A \cap B$. Τότε $x \in A$ και $x \in B$

Εφόσον το A είναι ανοιχτό, υπάρχει $\varepsilon_1 > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon_1) \subseteq A$

Εφόσον το B είναι ανοιχτό, υπάρχει $\varepsilon_2 > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon_2) \subseteq B$

Θέτοντας $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ έχουμε

$B_\rho(x, \varepsilon) = B_\rho(x, \varepsilon_1) \cap B_\rho(x, \varepsilon_2) \subseteq A \cap B$

Επομένως το $A \cap B$ είναι ανοιχτό

(iii) Έστω $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x \in G_{i_0}$

Εφόσον το G_{i_0} είναι ανοιχτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq G_{i_0}$

Εφόσον $G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ θα έχουμε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$

Επομένως το $\bigcup_{i \in I} G_i$ είναι ανοικτό

Παρατήρηση: Από το (ii) χρησιμοποιώντας επαγωγή ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, αν $A_1, \dots, A_n$ ανοικτά τότε $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ είναι ανοικτό.

Αν έχουμε άπειρη οικογένεια ανοιχτών συνόλων, ενδέχεται η τομή τους να μην είναι σύνολο.
Πχ: στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική τα σύνολα
$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$

Όμως $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ που δεν είναι ανοικτό

Ορισμός: Έστω X μη κενό σύνολο.
Μια οικογένεια των υποσυνόλων του X καλείται τοπολογία στο X αν:
(i) $\emptyset, X \in \tau$
(ii) Αν $A, B \in \tau$ τότε $A \cap B \in \tau$
(iii) Αν $(G_i)_{i \in I}$ οικογένεια της τ τότε $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

Η προηγούμενη πρόταση μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής:
Αν (X, ρ) μετρικός χώρος και συμβολίζουμε με τ_ρ την οικογένεια των ανοιχτών ως προς ρ συνόλων είναι μια τοπολογία

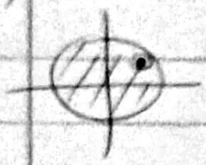
Ορισμός:
Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$
α) Ένα $x_0 \in A$ λέγεται εσωτερικό σημείο του A, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq A$
β) Το εσωτερικό του A είναι το σύνολο των εσωτ. σημείων του A.
Το εσωτ. σημείο του A συμβολίζεται με A° ή $int(A)$ (ή $int_\rho(A)$)
Έτσι $A^\circ = int(A) = \{x_0 \in A \; \exists \varepsilon > 0 \; B_\rho(x_0, \varepsilon) \subseteq A\}$

Παραδείγματα:

α) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$

$(\alpha,\beta)^\circ = (\alpha,\beta)$	$[\alpha,\beta)^\circ = (\alpha,\beta)$	$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$	$\mathbb{N}^\circ = \emptyset$
$[\alpha,\beta]^\circ = (\alpha,\beta)$	$(\alpha,\beta]^\circ = (\alpha,\beta)$	$(\mathbb{R}-\mathbb{Q})^\circ = \emptyset$	$\mathbb{Z}^\circ = \emptyset$

β) Στον $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική



Αν $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x^2+y^2 < 1\}$

$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; x^2+y^2 \leq 1\}$

$\Gamma = \mathbb{R} \times \{0\}$

Τα εσωτερικά σημεία αυτών:

$A^\circ = A$, $B^\circ = A$, $\Gamma^\circ = \emptyset$

Επίσης $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$ $\quad (\mathbb{R} \times \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$

Πρόταση:

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$

(i) $A^\circ \subseteq A$

(ii) $A^\circ = \bigcup\{V : V \text{ ανοιχτό}, V \subseteq A\}$

Άρα το A° είναι ανοικτό και μάλιστα το μεγαλύτερο ανοικτό που περιέχεται στο A.

(iii) Αν $A \subseteq B$ τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$

(iv) $A = A^\circ \Leftrightarrow$ το A είναι ανοιχτό

(v) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(vi) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$ και δεν ισχύει πάντα η ισότητα

απόδειξη

(i) Άμεσο από τον ορισμό

(ii) Έστω $x \in A^\circ$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq A$

Εφόσον $x \in B_\rho(x,\varepsilon)$ και $B_\rho(x,\varepsilon)$ είναι ανοιχτό

έχουμε ότι $x \in \bigcup\{V : V \text{ ανοιχτό } V \subseteq A\}$

Αντίστροφα, αν $x \in \bigcup\{V \ V \text{ ανοιχτό } V \subseteq A\}$, τότε υπάρχει ένα V ανοιχτό με $V \subseteq A$ ώστε $x \in V$

Εφόσον V ανοιχτό, υπάρχει $\varepsilon > 0 \Rightarrow B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V \subseteq A$

Άρα $x \in A^\circ$

Επομένως, $A^\circ = \bigcup\{V \ V \text{ ανοιχτό } V \subseteq A\}$

Συνεπώς A° είναι ανοιχτό.

(iii) Αν $A \subseteq B$

Τότε $A^\circ \subseteq A \subseteq B$ με A° ανοιχτό

Εφόσον το B° είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό που περιέχεται στο B, έχουμε $A^\circ \subseteq B^\circ$.

(iv) ($\Rightarrow$) Αν $A = A^\circ$, τότε (εφόσον το A° είναι πάντα ανοιχτό) έχουμε ότι το A είναι ανοιχτό

($\Leftarrow$) Αν το A είναι ανοιχτό

Ξέρουμε ότι $A^\circ \subseteq A$ (πάντοτε)

Αν $x \in A$ τότε (εφόσον το A είναι ανοιχτό) υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq A$, άρα $x \in A^\circ$ έτσι $A \subseteq A^\circ$

Επομένως $A = A^\circ$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{(v) } A \cap B \subseteq A \xrightarrow{(iii)} (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \\ A \cap B \subseteq B \xRightarrow{(iii)} (A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow (A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A^\circ \text{ ανοιχτό} \\ B^\circ \text{ ανοιχτό} \end{array}\right\} \Rightarrow A^\circ \cap B^\circ \text{ ανοιχτό} \\ \text{επίσης, } \left.\begin{array}{l} A^\circ \subseteq A \\ B^\circ \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B \end{array}\right\} \xRightarrow{(ii)} A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$$

$$\Rightarrow A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$$

(ii) $A \subseteq A\cup B \Rightarrow A^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ$
$B \subseteq A\cup B \Rightarrow B^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ$ $\Big\} \Rightarrow A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A\cup B)^\circ$

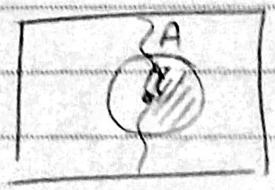
Η ισότητα δεν ισχύει πάντα όπως δείχνει το παρακάτω

Παράδειγμα:

① Στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική
$\mathbb{Q}^\circ \cup (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})^\circ = \emptyset = \emptyset$ $\neq$
ενώ $(\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$

② Δεύτερο αντιπαράδειγμα:
$A = (0,1)$ $\quad B = [1,2)$
$A^\circ = (0,1)$ $\quad B^\circ = (1,2)$
Άρα $A^\circ \cup B^\circ = (0,1)\cup(1,2)$
$A\cup B = (0,2)$, $(A\cup B)^\circ = (0,2)$ $\Big\} \neq$

Υπενθύμιση: Αν (X,ρ) μ.χ. και $A \subseteq X$ η σχετική μετρική στο A (που επάγει η ρ) είναι η $\rho_A : A\times A \to [0,+\infty)$
$\rho_A(x,y) = \rho(x,y) \quad \forall x,y \in A$
Έτσι έχουμε το νέο μ.χ. (A,ρ_A)
Τέτοιοι μ.χ. καλούνται υπόχωροι



Παρατήρηση: Αν $x\in A$, $\varepsilon > 0$
$B_{\rho_A}(x,\varepsilon) = A \cap B_\rho(x,\varepsilon)$

Πρόταση:
Έστω (X,ρ) μ.χ. και $A\subseteq X$
(i) Αν $G\subseteq A$ τότε το G είναι ανοιχτό στον (A,ρ_A) αν και μόνο αν υπάρχει V ανοιχτό υποσύνολο του X ώστε $G = A\cap V$
(ii) Αν $B\subseteq A$ τότε $\mathrm{int}_X(B) \subseteq \mathrm{int}_A(B)$
(όπου $\mathrm{int}_X(B)$ είναι το εσωτ. του B στο χώρο (X,ρ) και $\mathrm{int}_A(B)$ είναι το εσωτ του B στον (A,ρ_A)

<u>απόδειξη</u>

(i) ($\Leftarrow$) Αν υπάρχει V ανοιχτό υποσύνολο του X ώστε $G = A \cap V$

Θδο το G είναι ανοιχτό στο (A, ρ_A)

Έστω $x \in G$, τότε $x \in V$

Επειδή το V είναι ανοιχτό στο X, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq V \Rightarrow A \cap B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq A \cap V \Rightarrow B_{\rho_A}(x, \varepsilon) \subseteq G$

Άρα το G είναι ανοιχτό στο (A, ρ_A)

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το G είναι ανοιχτό υποσύνολο στο μετρικό χώρο (A, ρ_A)

Τότε $\forall x \in G$, υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x) \subseteq G$

Θέτουμε $V = \bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_x)$

Έχουμε ότι το V είναι ανοιχτό υποσύνολο του X (ως ένωση ανοιχτών)

και $A \cap V = G$

$A \cap V = A \cap \left(\bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_x)\right) = \bigcup_{x \in G}\left(A \cap B_\rho(x, \varepsilon_x)\right) = \bigcup_{x \in G} B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x)$

Ενώ αν $x \in G$, τότε $x \in A$ (εξ ορισμού $G \subseteq A$)

και $x \in B_\rho(x, \varepsilon_x) \subseteq V$

Συνεπώς το $x \in A \cap V$, άρα $G \subseteq A \cap V$

Επομένως, $G = A \cap V$

(ii) Αν $B \subseteq A$, το $\text{int}_X(B)$ είναι ανοιχτό στο X
και $\text{int}_X(B) \subseteq B \subseteq A$
Άρα το $\text{int}_X(B)$ είναι ανοιχτό στο (A, ρ_A)
Άρα από τις ιδιότητες του εσωτ.: $\text{int}_X(B) \subseteq \text{int}_A(B)$

Παρατήρηση: Δεν ισχύει πάντα ισότητα στον τελευταίο εγκλεισμό πχ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική και
$A = [0,1]$, $B = [0, \frac{1}{2}]$ $\text{int}_{\mathbb{R}}(B) = (0, \frac{1}{2})$
και $\text{int}_A(B) = [0, \frac{1}{2})$

πχ2: επίσης στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική
$\text{int}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$
$\text{int}_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) = \emptyset$

Ορισμός
Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$
Το F καλείται κλειστό (ως προς ρ) (ή ρ-κλειστό) αν το $X \setminus F$ $(= F^c)$ είναι ανοιχτό (ως προς ρ)

Παραδείγματα
(1) Σε κάθε μχ (X, ρ) κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό
Έστω $F = \{x\}$
Για να δείξουμε ότι το F είναι κλειστό αρκεί $X \setminus \{x\}$ είναι ανοιχτό σύνολο
Έστω $y \in X \setminus \{x\}$, τότε $y \neq x$, άρα $\rho(y,x) > 0$
Θέτοντας $\varepsilon = \rho(x,y)$
Θδο $B_\rho(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus \{x\}$
Έχουμε $\rho(x,y) = \varepsilon$ άρα $x \notin B_\rho(x, \varepsilon)$ άρα $B_\rho(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus \{x\}$
Άρα το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοιχτό επομένως το $\{x\}$ είναι κλειστό

2) Στον $\mathbb{R}$ με τον συνήθη μετρικό. Το σύνολο $(-\infty, \alpha]$ για $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι κλειστό διότι το συμπλήρωμά του, δηλ. το $(\alpha, +\infty)$ είναι ανοιχτό

Το $[\alpha, \beta]$ για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha < \beta$ είναι κλειστό διότι το συμπλήρωμά του, δηλ το $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, +\infty)$ είναι ανοιχτό

3) Στο διακριτό μετρικό χώρο (X, ρ) κάθε υποσύνολο του είναι κλειστό (διότι κάθε υποσύνολό του είναι ανοιχτό)

4) Σε κάθε μ.χ (X, ρ) είναι κλειστό σύνολο

Απ/ Έστω $x \in X$, $\varepsilon > 0$

Θδο $\hat{B}_\rho(x, \varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο

Ανδο το $X \setminus \hat{B}_\rho(x, \varepsilon)$ είναι ανοιχτό

Έστω $y \in X \setminus \hat{B}_\rho(x, \varepsilon)$, τότε $y \notin \hat{B}_\rho(x, \varepsilon)$

$\rho(y, x) > \varepsilon$

Θέτω $\delta = \rho(y, x) - \varepsilon$

και θα δείξουμε $B_\rho(y, \delta) \subseteq X \setminus \hat{B}_\rho(x, \varepsilon)$

Έστω $z \in B_\rho(y, \delta)$, τότε $\rho(z, y) < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(z, y) < \rho(y, x) - \epsilon$

Θα καταλήξω σε άτοπο:

Αν $z \in \hat{B}_\rho(x, \varepsilon)$, τότε $\rho(x, z) \leq \varepsilon$

Άρα $\rho(y, x) \leq \rho(y, z) + \rho(z, x)$ με τριγωνική

$\Rightarrow \rho(y, x) < \rho(y, x) - \epsilon + \epsilon$

$\Rightarrow \rho(y, x) < \rho(y, x)$ Άτοπο.

Άρα $z \notin \hat{B}_\rho(x, \varepsilon)$, συνεπώς $z \in X \setminus \hat{B}_\rho(x, \varepsilon)$